**34 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФЕРМИ-ДИРАКА.**

Одной из основных задач статистической физики является нахождение закона распределения частиц по разным квантовым состояниям. Распределения позволяют находить средние значения физических величин.

Пусть имеется замкнутая система практически не взаимодействующих *N* фермионов (электронов) - идеальный ферми-газ. Фермионы могут находиться в состояниях с энергией Энергии отвечает различных состояний. Число частиц с энергией равно . Числа со временем меняются. Если система находится в равновесном состоянии, то **распределение частиц по энергиям** характеризуется средними числами частиц приходящихся на одно квантовое состояние с энергией . Ясно, что будут определяться из условия максимума статистического веса (энтропии). Следовательно, необходимо найти выражения для и определить при каком распределении частиц по энергиям будет достигаться максимум . Выделим в системе подсистему фермионов, имеющих энергию . Энергии отвечает состояний. Состояния изобразим ячейками, упорядоченными в виде ленты. Фермионы изобразим черными кругами. В соответствии с принципом Паули в каждой ячейке может находиться не более одного фермиона. Все возможные микросостояния получатся при всевозможных перестановках ячеек. В силу принципа тождественности при перестановках только ячеек, содержащих частицы мы получаем одно и тоже микросостояние. Таких перестановок . Аналогично, при перестановках только пустых ячеек получается одно и тоже микросостояние. Таких перестановок . Следовательно число микросостояний, реализующих макросостояние, когда частиц находится в состояниях равно

Статистический вес и энтропия всей системы

Воспользуемся формулой Стирлинга

справедливой для больших значений *N.* Тогда энтропия равна (равна приближенно с высокой точностью в условиях рассматриваемой задачи)

Если система замкнута, то с течением времени она перейдет в равновесное состояние, когда параметры не будут меняться. Равновесному состоянию соответствует максимум энтропии. Следовательно, будет выполняться

Это условный (относительный максимум, т.к. не являются независимыми. Для замкнутой системы должны выполняться условия:

Два последних уравнения есть линейные уравнения относительно . Из них можно, например, выразить и через остальные . Поэтому из нельзя требовать выполнение

при всех значениях *i*. Для нахождения условного максимума можно использовать метод множителей Лагранжа. Введем вспомогательную функцию

и таковы, что коэффициенты при и в точке условного максимума равны нулю:

Выполнение этих условий достигается выбором и . Остальные, и т.д., независимы. Поэтому в точке условного максимума выполняются условия

Условия для и для одинаковы и их можно объединить:

Подставив в эти условия выражение для энтропии после преобразований получаем

Введено обозначение для среднего числа частиц с энергией в одном состоянии

Множитель определяется средней энергией частиц и, следовательно температурой системы:

Вводится химический потенциал

В результате получаем распределение фермионов по энергиям – распределение Ферми-Дирака:

Параметр определяется нормировкой на полное число частиц, выражающей условие сохранения числа частиц:

**Доказательство формулы Стирлинга.**

При больших значениях суммирование в формуле можно заменить на интегрирование, заменив

Итак, формула Стирлинга

доказана.

**Определение множителя** . В силу равенства нулю и

Учли, что число частиц остается постоянным и поэтому . Пусть система получает обратимо, без совершения работы, количество теплоты . Если не совершается работа, то вся теплота идет на приращение энергии системы: . Из второго начала термодинамики получаем

Итак